2П

УДК 681.325

О.Н. Паулин
Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса, Украина
paulin@te.net.ua

Метод построения универсальных симметрических логических модулей

Рассматривается табличный метод построения универсальных симметрических логических модулей (УСМ). В методе используются таблица покрытия на основе функций равнозначности и таблица функционирования блока формирования настроек УСМ. Выбираемые на выходе УСМ симметрические функции кодируются в соответствии с принципом локального кодирования Лупанова. Построенные этим методом схемы УСМ имеют наименьшую сложность по сравнению с известными решениями.

Введение

При логическом проектировании БИС и их функциональных компонентов используются, в частности, универсальные симметрические логические модули (УСМ), которые осуществляют дискретное преобразование информации в соответствии с множеством *M* функций преобразования [1]. УСМ с точки зрения управления принадлежат к классу устройств с информационно-зависимыми сигналами настройки – сигналы настройки являются функциями входных информационных переменных. В работе рассматриваются модули, реализующие все возможные симметрические функции (СФ) (элементарные и любые их совокупности) *n* переменных. Модули предназначены для построения регулярных схем, реализующих такие функции, аргументы которых «равноправны» (их можно менять местами произвольным образом); в частности, такие модули могут быть применены для построения арифметических устройств, например, многооперандных сумматоров [2].

В [1] приведены разные варианты построения УСМ, есть и ссылки на практическую реализацию в виде авторских свидетельств. В то же время должного внимания способам выбора нужной функции из множества реализуемых не уделяется; соответственно, не уделяется внимания и схемам блока формирования настроек (БФН) модуля. Не описаны такие способы и блоки и в других источниках. По-видимому, авторы считают, что для проектирования БФН достаточно воспользоваться стандартными методами синтеза логических схем. К сожалению, эта точка зрения ошибочна – качество схемы БФН во многом определяется тем, какая кодировка принята для выбираемых на выходе модуля функций. К тому же, как показывает анализ, известные УСМ требуют больших аппаратных затрат.

Постановка задачи. Необходимо предложить новые подходы к построению УСМ (точнее, БФН) с целью получения наиболее экономичных логических схем.

Метод построения универсального СМ

Исходные положения синтеза УСМ

При синтезе УСМ могут быть использованы идеи, метод и методика, рассмотренные в [1], для построения модуля, реализующего все возможные булевы функции *n* переменных; в частности, УСМ также могут быть построены с использованием функций равнозначности. Однако специфика СФ (конституенты единиц этих функций обладают инвариантом) позволяет модифицировать и метод, и методику.

Определение 1. ***Цепочкой*** *m* аргументов называется последовательность пар аргументов, таких, что соседние пары имеют общие аргументы: (x_1,x_2), (x_2,x_3), … , (x_{m-1},x_m).

Введём следующие обозначения для функций равнозначности *R* и *Q*, аргументы которых связаны в цепочку:

R – функция равнозначности двух аргументов, $R_j = x_j x_{j+1} \vee \bar{x}_j \bar{x}_{j+1}$;

Q – функция равнозначности нескольких аргументов, $Q_l = T_i \vee T_{\bar{i}}$;

где T_i и $T_{\bar{i}}$ – термы, равные единице на противоположных наборах;

i и $\bar{i}$ – десятичные номера термов (конституент единицы);

l – десятичный номер функции.

Будем называть функции равнозначности *R* ***базовыми***, а *Q* – ***составными***.

Функция *Q* является конъюнкцией базовых функций *R* (в прямой либо инверсной форме), причём аргументы функции *Q* представляют собой цепочку, начиная с x_1. Тогда *l* – десятичный эквивалент двоичного набора кода совокупности функций *R*. Так, $Q_5 = R_3 \bar{R}_2 R_1$.

Предлагаемый ниже метод синтеза УСМ существенно опирается на следующую теорему.

Теорема. Конъюнкция *k* базовых функций равнозначности (в прямой либо инверсной форме в любом сочетании) двух аргументов, причём аргументы конъюнкции составляют цепочку, представляет собой функцию равнозначности *n* аргументов, $n = k+1$.

Доказательство. Для $k = 2$ теорема доказывается непосредственным перемножением функций $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ (имеем 4 варианта; в каждом варианте из четырёх термов произведения два тождественно равны нулю, а оставшиеся являются противоположными, то есть получаем функцию равнозначности).

Для $k = 3$ имеем $Q = (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 x_3 \vee \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \bar{x}_3)(x_3 \tilde{x}_4 \vee \bar{x}_3 \tilde{x}_4) = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 x_3 \tilde{x}_4 \vee \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \bar{x}_3 \tilde{x}_4$.

Здесь в разных термах значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_4$ противоположны, то есть снова получена функция равнозначности.

Перейдём к общему случаю, используя метод математической индукции.

Пусть $Q = (p\, x_k \vee q\, \bar{x}_k)$ – функция равнозначности *k* аргументов, а *p* и *q* – противоположные термы, состоящие из $k-1$ аргументов. Тогда $Q' = Q\tilde{R}(x_k, x_{k+1}) = (p\, x_k \vee q\, \bar{x}_k)(\tilde{x}_k x_{k+1} \vee \tilde{x}_k \bar{x}_{k+1})$. В зависимости от конкретных значений $\tilde{x}_k$ (2 варианта) имеем $Q' = p\, x_k x_{k+1} \vee q\, \bar{x}_k \bar{x}_{k+1}$ либо $Q' = p\, x_k \bar{x}_{k+1} \vee q\, \bar{x}_k x_{k+1}$. В обоих случаях получены функции равнозначности, число аргументов в которых равно $k+1$.

Итак, каждое логическое домножение *Q* на *R* увеличивает на единицу число аргументов *Q*.

При синтезе УСМ используется первообразная функция вида [1]

$$Y = \bigvee_{i=0}^{2^{n-1}-1} Q_i u_i, \quad (1)$$

где $\vee$ – символ логического сложения,

Q_i – функции равнозначности *n* переменных, включающие конституенты единицы *n* входных переменных (аргументов), $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

i – десятичный номер набора базовых функций равнозначности, соответствующий данной функции *Q*;

u_i – коэффициенты первообразной функции из множества $U = \{u_0, u_1, \dots, u_t\}$, $t = 2^{n-1} - 1$, осуществляющие функции настройки с алфавитом

$$u_i = \{0, 1, \bar{x}, x\}, \;\; x \in \{\overline{x_1, x_n}\}; \quad (2)$$

алфавит для u_i задаётся исходя из того, что при логическом умножении *Q* на управляющий аргумент *x* выделяется один из термов *R*.

При формировании соответствующих настроек из 2^{n-1} пар термов собираются термы конкретной симметрической функции $H_n(a_1, a_2, ..., a_k)$, где a_j – индексы СФ, $j = \overline{1,k}$. Выбор нужной СФ осуществляется заданием локального кода K выбора СФ, $K = k_n \cdots k_1 k_0$.

Метод построения УСМ

Метод включает в себя:

1) первообразную функцию вида (1);

2) локальное по Лупанову [3] кодирование СФ;

3) информационно-зависимое управление $U = f(X_1, K)$ выбором СФ в соответствии со структурой, представленной на рис. 1а;

4) таблицы покрытия и функционирования.

Структура настраиваемого УСМ $У_n^1$ содержит блоки: КС – комбинационная схема; БФН – блок формирования настроек; Ком – коммутатор. На вход модуля поступает множество входных переменных X (аргументов функций равнозначности), $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$; X_1 – подмножество управляющих аргументов, $X_1 \subset X$; а также локальный код K выборки совокупности (в частных случаях – какой-либо одной, фундаментальной) симметрических функций, $K= k_n...k_1k_0$. Выходная функция Y выбирается из множества возможных в соответствии с кодом K. При формировании настроек используются $n_1 = n - 2$ управляющих аргументов X_1.

КС модуля включает в себя совокупность двухвходовых элементов равнозначности; на рис. 1б и 1в показаны 2 варианта реализации КС. Коммутатор представляет собой логическую схему И–ИЛИ, реализующую функцию (1). Блок формирования настроек (выбора СФ) также представляет собой логическую схему И-ИЛИ; синтез последнего и является наиболее интересным и важным.

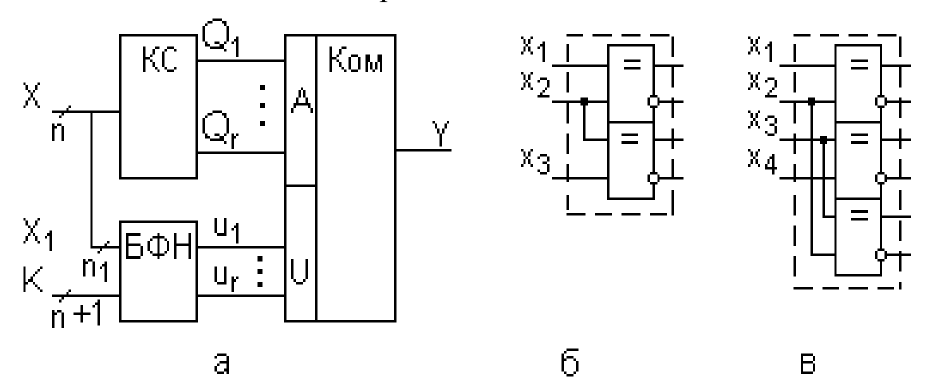


Рисунок 1 – Настраиваемый УСМ:
а – структура; б – КС для n = 3; в – КС для n = 4

Выходная функция Y и функции управления коммутатором U определяются выражениями: $Y=\varphi(U, R)$, $U=f(X_1, K)$, $R=\lambda(X)$.

Методика синтеза УСМ

Методика синтеза УСМ основана на описанном методе и включает в себя:

1) определение базовых функций R_j, в которых в соответствии с (2) аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны по цепочечной схеме;

2) определение Q_j как конституент единицы на j-м наборе переменных $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$;

3) заполнение таблицы покрытия (ТП) конституентами единицы, а также строкой управляющих аргументов;

4) определение по ТП частных значений коэффициентов u_i и заполнение таблицы функционирования (ТФ) модуля;

5) определение символов (1, $\bar{x}$, x) из алфавита u_i как функций разрядов $k_n \cdots k_1 k_0$ кода K выбора СФ по ТФ;

6) минимизация u_i по символам (1, $\bar{x}$, x).

Рассмотрим методику подробнее. Синтез модуля проводится с использованием специальным образом построенной таблицы покрытия фундаментальных СФ m аргументов конституентами единицы функций Q; в столбцах таблицы размещаются десятичные номера термов (конституент единицы) функций Q, а в строках записаны конституенты, которые в совокупности составляют данную фундаментальную СФ. В нижней строке таблицы помещены аргументы (в прямой либо инверсной форме), с помощью которых осуществляется выбор нужных конституент СФ.

Отметим, что выбор минимального числа коэффициентов u_i тесно связан с объединением функций Q.

Далее строится ТФ, которая описывает следующую связь между кодом K выбора индексов a_i СФ и коэффициентами u_i: 1) совокупности индексов СФ соответствуют единицы в коде выбора СФ на тех позициях локального кода, номера которых совпадают с индексами, и нули – на его остальных позициях; 2) определяются по таблице покрытия такие значения u_i, которые обеспечивают получение нужной совокупности индексов СФ, то есть символов (1, $\bar{x}$, x) из алфавита u_i, для получения конкретных СФ – сначала фундаментальных СФ $H(a)$, а затем через них – произвольных СФ $H(a_1, \ldots , a_k)$.

Собственно синтез проводится обычным образом: выписываются из ТФ для каждого коэффициента u_i в виде 0-кубов те коды настройки, которые соответствуют тому или иному символу его алфавита (1, $\bar{x}$, x); далее осуществляется минимизация и построение схемы БФН (блока выбора СФ) с использованием мультиплексоров.

Примеры синтеза УСМ

Пример 1. Рассмотрим синтез трёхвходового УСМ Y_3^1.

1. Базовыми функциями для Y_3^1 являются

$R_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $R_2 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

2. Функции равнозначности Q_i имеют вид:

$$Q_0 = \bar{R}_2 \wedge \bar{R}_1, \quad Q_1 = \bar{R}_2 \wedge R_1, \quad Q_2 = R_2 \wedge \bar{R}_1, \quad Q_3 = R_2 \wedge R_1.$$

3. Строим таблицу покрытия (табл. 1) для фундаментальных СФ трёх аргументов.

Таблица 1 – Покрытие конституентами «1» СФ трёх аргументов

Симметрические функции	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3
H(0)				0
H(1)	2	4	1	
H(2)	5	3	6	
H(3)				7
U	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1$

4. Как показывает анализ ТП, функции Q_0 и Q_2 могут быть объединены: $Q_{0,2} = \bar{R}_2$. Тогда формула (1) принимает вид $Y = u_{0,2}Q_{0,2} \vee u_1 Q_1 \vee u_3 Q_3$.

Фундаментальные СФ определяются выражениями:

$$H(0) = Q_3 \bar{x}_1, \quad H(1) = Q_0 \bar{x}_1 \vee Q_1 x_1 \vee Q_2 \bar{x}_1,$$
$$H(2) = Q_0 x_1 \vee Q_1 \bar{x}_1 \vee Q_2 x_1, \quad H(3) = Q_3 x_1.$$

5. Значения коэффициентов u_i для конкретных симметрических функций как функций от разрядов $k_3, \ldots k_0$ их номеров приведены в табл. 2.

6. Минимизируя каждый коэффициент u_i как функцию кодов $k_3k_2k_1k_0$ (табл. 2) для символов $(1, \bar{x}$, x) и объединяя полученные результаты, записываем окончательные выражения: $u_0 = k_2 x_1 \vee k_1 \bar{x}_1$, $u_1 = k_2 \bar{x}_1 \vee k_1 x_1$, $u_2 = u_0$, $u_3 = k_3 x_1 \vee k_0 \bar{x}_1$.

Таблица 2 – Описание функционирования УСМ Y_3^1

H(a)	k_3	k_2	K_1	k_0	u_3	u_2	u_1	u_0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тожд. «0»	0	0	0	0	0	0	0	0
H(0)	0	0	0	1	$\bar{x}_1$	0	0	0
H(1)	0	0	1	0	0	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$
H(0,1)	0	0	1	1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$
H(2)	0	1	0	0	0	x_1	$\bar{x}_1$	x_1
H(0,2)	0	1	0	1	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$	x_1
H(1,2)	0	1	1	0	0	1	1	1
H(0,1,2)	0	1	1	1	$\bar{x}_1$	1	1	1
H(3)	1	0	0	0	x_1	0	0	0
H(0,3)	1	0	0	1	1	0	0	0
H(1,3)	1	0	1	0	x_1	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$
H(0,1,3)	1	0	1	1	1	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$
H(2,3)	1	1	0	0	x_1	x_1	$\bar{x}_1$	x_1
H(0,2,3)	1	1	0	1	1	x_1	$\bar{x}_1$	x_1
H(1,2,3)	1	1	1	0	x_1	1	1	1
Тожд. «1»	1	1	1	1	1	1	1	1

Схема УСМ Y_3^1 приведена на рис. 2.

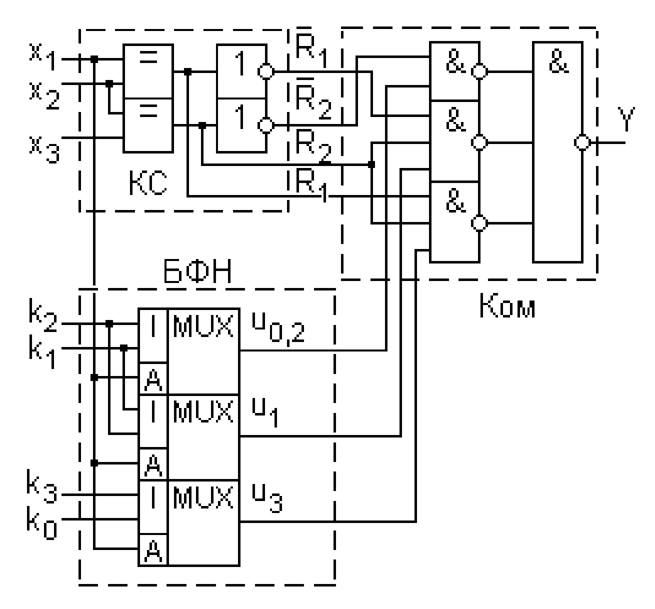


Рисунок 2 – Схема УСМ Y_3^1

Пример 2. Синтезируем УСМ четырёх аргументов Y_4^1.

1. Базовыми функциями являются

$$R_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad R_2 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad R_3 = x_3 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

2. Функции равнозначности Q_i имеют вид:

$$Q_0 = \bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3; \quad Q_1 = \bar{R}_1 \bar{R}_2 R_3; \quad Q_2 = \bar{R}_1 R_2 \bar{R}_3; \quad Q_3 = \bar{R}_1 R_2 R_3;$$

$$Q_4 = R_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3; \quad Q_5 = R_1 \bar{R}_2 R_3; \quad Q_6 = R_1 R_2 \bar{R}_3; \quad Q_7 = R_1 R_2 R_3.$$

3. Строим таблицу покрытия конституентами единицы для фундаментальных СФ четырёх аргументов (табл. 3).

Таблица 3 – Покрытие конституентами «1» СФ четырёх аргументов

СФ	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
Н(0)								0
Н(1)		4		8	2		1	
Н(2)	5, 10		6, 9			3, 12		
Н(3)		11		7	13		14	
Н(4)								15
U	1	$\tilde{x}_3$	1	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2$	1	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_2$

4. Анализ ТП (табл. 3) показывает, что некоторые столбцы имеют одинаковое управление, поэтому возможно объединение столбцов:

$$S_1 = Q_0 \vee Q_2 = \bar{R}_1 \bar{R}_3; \quad S_2 = Q_1 \vee Q_3 = \bar{R}_1 R_3; \quad S_3 = Q_4 \vee Q_6 = R_1 \bar{R}_3;$$

$$S_4 = Q_5 = R_1 \bar{R}_2 R_3; \quad S_5 = Q_7 = R_1 R_2 R_3.$$

$$w_1 = u_{2,0}; \quad w_2 = u_{3,1} \quad w_3 = u_5 \quad w_4 = u_{6,4} \quad w_{51} = u_7.$$

Тогда формула (1) принимает вид

$$Y = w_1 S_1 \vee w_2 S_2 \vee w_3 S_3 \vee w_4 S_4 \vee w_5 S_5.$$

5. Значения коэффициентов w_i для фундаментальных СФ как функций от битов $k_4, \ldots, k_0$ их номеров приведены в табл. 4.

6. Минимизируя каждую w_i как функцию кодов $k_4 k_3 k_2 k_1 k_0$ для символов $(1, \bar{x}, x)$ и объединяя полученные результаты, записываем окончательные выражения:

$$w_1 = w_3 = k_3; \quad w_2 = k_1 \bar{x}_3 \vee k_3 x_3; \quad w_4 = k_1 \bar{x}_2 \vee k_3 x_2; \quad w_5 = k_0 \bar{x}_2 \vee k_4 x_2.$$

Хотя УСМ в [4] синтезирован во многом эвристически, его решение совпадает с полученным по предложенной методике с точностью до обозначений.

Таблица 4 – Описание функционирования УСМ Y_4^1

СФ	$k_4 k_3 k_2 k_1 k_0$	w_5	w_4	w_3	w_2	w_1
Н(0)	0 0 0 0 1	$\bar{x}_2$	0	0	0	0
Н(1)	0 0 0 1 0	0	$\bar{x}_2$	0	$\bar{x}_3$	0
Н(2)	0 0 1 0 0	0	0	1	0	1
Н(3)	0 1 0 0 0	0	x_2	0	x_3	0
Н(4)	1 0 0 0 0	x_2	0	0	0	0

Полная ТФ и схема УСМ Y_4^1 приведены в [4]. Отметим, что схема БФН в статье избыточна – она должна включать 3 мультиплексора типа 2 – 1 (см. п. 6).

Параметры УСМ

Рассмотрим вопрос о минимальной сложности схемы УСМ, построенной на основе предлагаемого метода. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. Минимальное количество бит кода K выбора СФ (фундаментальных, либо их совокупностей) при построении УСМ обеспечивается локальным кодированием; при этом количество бит равно $m_k = m+1$.

Доказательство. При локальном кодировании i-й бит кода K принимает значение 1, если $H(i)$ входит в Y. Количество фундаментальных СФ в точности равно $m+1$, то есть m_k не может быть меньше этого числа. Следовательно, m_k – минимально.

Лемма 2. Схема блока формирования настроек (БФН) при локальном кодировании обладает минимальной сложностью.

Доказательство. БФН по сути представляет собой коммутатор бит задаваемого кода выбора, управляемого определёнными аргументами. Схема коммутатора получается как результат минимизации по ТФ модуля в следующем виде: выписываются для каждой управляющей переменной u_i в виде 0-кубов те коды настройки, которые соответствуют тому или иному символу её алфавита $(1, \bar{x}, x)$; на каждый символ алфавита приходится ¼ от 2^{m+1} строк ТФ, то есть 2^{m-1} строки ($(m-1)$ – кубы). Это означает, что склеится $m-1$ аргумент, а останется 2 аргумента, которые будут коммутироваться значением $\tilde{x}$. Для коммутации достаточно иметь мультиплексоры вида 2 – 1; их количество для конкретного n будет минимальным, что обеспечивается склеиванием Q.

Оценим минимальную сложность (аппаратные затраты) УСМ.

Утверждение. Схема модуля Y_n^1, построенного по предлагаемой методике, обладает минимальной сложностью.

Из определения понятия «цепочка» следует, что минимальное число базовых функций равнозначности, необходимое для построения всех СФ n аргументов, равно $n-1$. Исходное число функций Q равно 2^{n-1}, однако благодаря локальному кодированию СФ часть Q склеивается, соответственно уменьшается и количество коэффициентов u_i функции Y, то есть существенно упрощается схема коммутатора (до половины). Дальнейшее уменьшение сложности схемы коммутатора не представляется возможным.

Закономерности сокращения сложности схемы не выявлены.

Сложность БФН по лемме 2 является минимальной. Таким образом, все компоненты структуры УСМ имеют минимальную сложность, и вся структура УСМ Y_n^1 поэтому также имеет минимальную сложность.

Сложность схемы УСМ оценивается выражением по Квайну:

$S<n+(n+4)2^{n-1}$, что меньше сложности модуля по [1, рис. 2.12].

Быстродействие УСМ Y_n^1. При одинаковой элементной базе модули по предлагаемой методике синтеза имеют задержку на 1τ большую, чем модули по структуре [1, рис. 2.1], которая для последнего составляет $T=4\tau$, где τ – задержка вентиля И-НЕ.

Заключение

Предложен метод построения универсальных симметрических модулей, в структуре которых ключевую роль играет блок формирования настроек (БФН). Метод использует функции равнозначности в таблице покрытия и локальное по Лупанову кодирование СФ, выбираемых на выходе модуля, в таблице функцио-

нирования БФН. На основе предложенного метода разработана методика построения УСМ, которая проиллюстрирована двумя примерами (число аргументов СФ равно $n = 3$, 4), имеющими самостоятельное значение. Аналогично может быть построен УСМ Y_n^1 для $n = 5$, 6, … . Заметим, что в случае $n>6$ таблицы становятся громоздкими, поэтому целесообразно использовать декомпозицию аргументов СФ.

Метод обеспечивает минимальную сложность схемы БФН, следовательно, и всего модуля. Она в принципе не может быть уменьшена. Задержка построенного УСМ составляет 4τ, где τ – задержка логического вентиля.

Литература

1. Логическое проектирование БИС / В.А. Мищенко, А.И. Аспидов, В.В. Витер и др. / Под ред. В.А. Мищенко. – М.: Радио и связь, 1984. – 312 с.
2. Паулин О.Н. Об эффективности сжатия многорядных кодов // Искусственный интеллект. – 2004. – № 3. – С. 224-228.
3. Лупанов О.Б. К вопросу о реализации симметрических функций алгебры логики контактными схемами // Проблемы кибернетики. – М.: Наука. – 1965. – Вып. 15. – С. 85-99.
4. Паулин О.Н., Дрозд Ю.В. О синтезе логических модулей, описываемых симметрическими функциями // Ученые записки Симферопольского государственного университета: Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Приборостроение-98». – Винница-Симферополь, 1998. – С. 189-192.
5. Паулин О.Н. К построению прикладной теории симметрических булевых функций // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С. 245-255.

О.М. Паулін

Метод побудуви універсальних симетричних логічних модулів

Розглядається табличний метод побудови універсальних симетричних логічних модулів (УСМ). У методі використовуються таблиця покриття на основі функцій рівнозначності та таблиця функціонування блоку формування настроєнь УСМ. Симетричні функції, які вибираються на виході модуля, кодуються відповідно до принципу локального кодування Лупанова. Побудовані цим методом схеми модулів мають найменшу складність в порівнянні із відомими рішеннями.

O.N. Paulin

The Method of Design of the Universal Symmetric Logical Modules

The table method of design of the universal symmetric logical modules (USM) is considered. In this method are used covering table on base of the functions of equivalence and function table of the forming tuning block of the USM. The selected symmetric function on the output of module in accordance with the Lupanov's principle of the local coding is coded. Designed schemes of the modules by this method have the least complication in comparison with known decision.

Статья поступила в редакцию 21.07.2008.